GEOMETRI ANALITIK BIDANG PADA KOORDINAT MIRING

Zainnur Wijayanto, M.Pd dan **Drs. B. Kusmanto, M.Pd**
Pendidikan Matematika, FKIP UST
Email: zannuwijaya@yahoo.com

Abstract

The aim of this study was to determine (1) the shape and properties of any of the lines in the coordinate oblique, (2) the shape and properties of any of the circles on the coordinate oblique, (3) the shape and properties of any of parabola in oblique coordinates, (4) the shape and properties of any of the ellipse in oblique coordinates, (5) the shape and properties of any of the hyperbole in oblique coordinates.

The method to be used is a literature review to collaborate with existing theories.

The results showed that the equation of the line through $P_1 = (x_1, y_1)$ *and* $P_2 = (x_2, y_2)$ *at oblique coordinate* α^o *becomes:* $y - y_1 = m_r(x - x_1)$ *with* $m_r = \tan_{(180^o - \alpha^o)} \beta$ $m_r = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Keywords*: Plane Analytic Geometry, Oblique coordinates.*

1. PENDAHULUAN

Geometri Analitik merupakan suatu bidang studi dari hasil perpaduan antara Geometri dan Aljabar. Seperti yang diketahui bahwa himpunan semua titik pada suatu garis lurus berkorespondensi 1 - 1 dengan himpunan semua bilangan real. Demikian pula himpunan semua titik pada bidang datar berkorespondensi 1 - 1 dengan himpunan semua pasangan bilangan-bilangan real (x, y). Dan himpunan semua titik pada ruang berkorespondensi 1 – 1 dengan himpunan semua tripel bilangan-bilangan real (x, y, z). Oleh karena itu, gambar/kurva pada bidang maupun luasan dalam ruang, yang biasa dipelajari dalam geometri, dapat dinyatakan sebagai himpunan pasangan/tripel dari bilangan-bilangan real, yang biasa dipelajari dalam Aljabar. Misalnya, lingkaran pada bidang dapat dipandang sebagai $(x, y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 = 25)$. Untuk mempermudah dalam mempelajarinya, seperti dalam geometri dipilahkan menjadi Geometri Datar dan Geometri Ruang, maka dalam Geometri Analitik dibedakan pula menjadi Geometri Analitik Bidang dan Geometri Analitik Ruang.

Dalam Geometri Analitik Bidang disajikan posisi titik pada bidang koordinat, jarak dua titik, persamaan garis lurus dan hubungan letak dua garis lurus, persamaan kurva-kurva istimewa seperti lingkaran, elips, hiperbola dan parabola. Akan tetapi selama ini yang peneliti ketahui bahwa sistem koordinat yang digunakan adalah system koordinat kartesius tegak dengan perpotongan sumbu-X dan sumbu-Y membentuk sudut 90°. Siceloff, Wentworth dan Smith dalam bukunya yang berjudul *Analytic Geometry,* Fuller dalam bukunya yang berjudul *Analytic Geometry,* dan Bocher dalam bukunya *Plane Analytic Geometry* memberikan gagasan tentang sistem koordinat baru yaitu koordinat miring, dimana sumbu-X dan sumbu-Y tidak tegak lurus (membentuk 90°) melainkan membentuk sudut α, dimana 0° < α < 180° dan α ≠ 90°. Oleh karena itu peneliti berkeinginan untuk mengkaji bentuk dan sifat-sifat dari garis, lingkaran, parabola, elips dan hiperbola pada koordinat miring.

Berdasarkan paparan tersebut rumusan masalah yang akan ditulis yaitu sebagai berikut:

"Bentuk dan sifat-sifat apa saja dari garis pada koordinat miring?"

2. METODE PENELITIAN

Metode yang akan digunakan adalah kajian literatur dengan mengkolaborasikan teori yang sudah ada seperti *analytic geometry* yang mengkaji garis, lingkaran, parabola, elips dan hiperbola pada koordinat kartesius tegak lurus. Kemudian yang harus dikerjakan adalah mengkaji *analytic geometry* tentang garis, lingkaran, parabola, elips dan hiperbola pada koordinat miring α, dimana 0° < α < 180° dan α ≠ 90°.

3. PEMBAHASAN

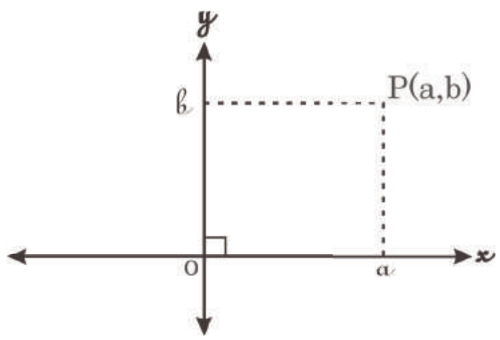
1.1. Definisi

Garis bilangan adalah himpunan yang berkorespondensi satu-satu dengan ℝ.
Ket : korespondensi satu-satu (bijektif) = injektif ∪ surjektif

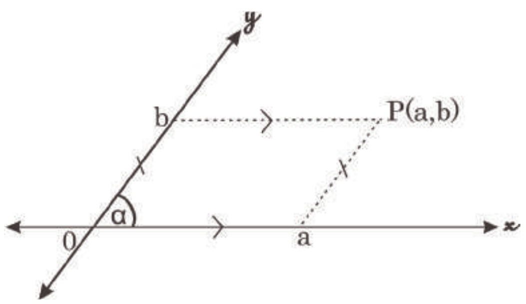
1.2. Remark

Macam-macam Koordinat Kartesius

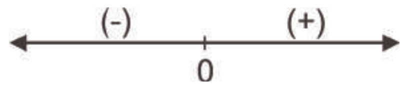
1. Koordinat Kartesius Tegak



2. Koordinat Kartesius Miring



Garis bilangan diilustrasikan



Elemen dari garis bilangan biasanya disebut titik (.).
Jika diberikan dua titik berbeda pada garis bilangan, yaitu a dan b, maka jarak antara a dan b adalah sebuah bilangan positif yang didefinisikan dengan $r = |a-b|$ atau $r = |b-a|$.

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

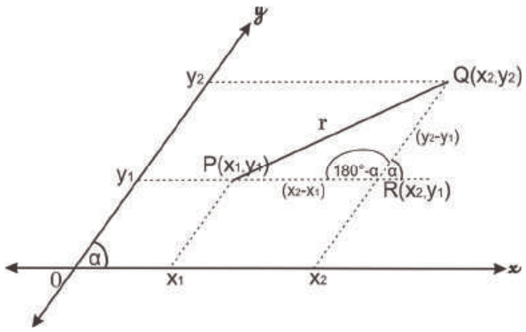
$$|3| = 3, \text{ karena } 3 \geq 0$$

$$|0| = 0, \text{ karena } 0 \geq 0$$

$$|-3| = -(-3) = 3, \text{ karena } -3<0$$

Jarak Antara Dua Titik pada Koordinat Kartesius Miring $(\alpha : 0 < \alpha \leq 90^o)$

Diberikan dua titik $P(x_1, y_1)$ dan $Q(x_2, y_2)$



Dalam ΔPQR berlaku aturan cosinus sebagai berikut

$$PQ^2 = PR^2 + RQ^2 - 2PR.RQ\cos(180^o - \alpha)$$

atau

$$PQ^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - 2(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)(-\cos\alpha)$$

$$PQ^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + 2(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)\cos\alpha$$

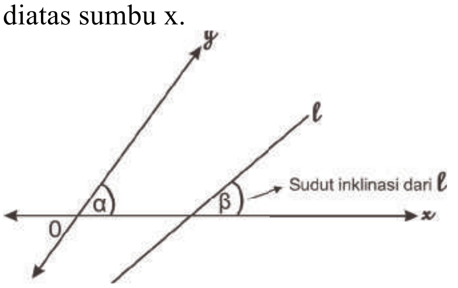
$$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + 2(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)\cos\alpha}$$

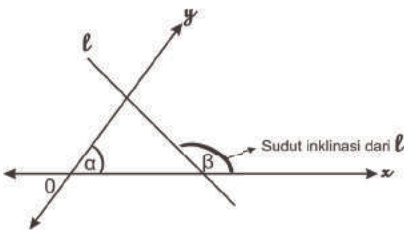
Jarak antara $P(x_1, y_1)$ dan $Q(x_2, y_2)$ adalah

$$r = PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + 2(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)\cos\alpha}$$

1.3. Definisi

Diberikan garis l dan memotong sumbu x. Sudut inklinasi adalah sudut yang dibentuk pada sebelah kanan garis l dan diatas sumbu x.





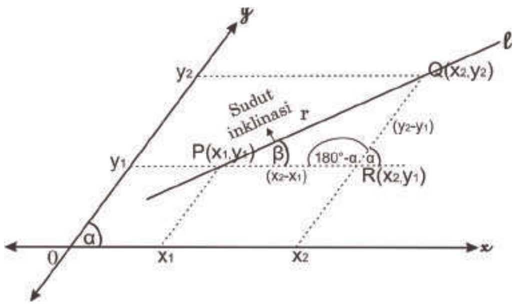
1.4. Definisi

Diberikan garis l, slope/ kemiringan/ gradient dari l didefinisikan dengan $m = \tan\beta$, β adalah sudut inklinasi dari l.

1.5. Postulat I Euclid

Dari dua titik yang berbeda, dapat dibuat tepat satu garis lurus.

Jika garis l melalui titik $P(x_1, y_1)$ dan $Q(x_2, y_2)$, maka slope dari l dapat diturunkan sebagai berikut:



Mencari $\sin\beta$ dengan menggunakan aturan sinus, diperoleh

$$\frac{r}{\sin(180^o-\alpha)}=\frac{y_2-y_1}{\sin\beta}$$

$$\frac{r}{\sin\alpha}=\frac{y_2-y_1}{\sin\beta}$$

$$\sin\beta=\frac{(y_2-y_1)\sin\alpha}{r}\quad\ldots(1)$$

Mencari $\cos\beta$ dengan menggunakan identitas trigonometri, diperoleh

$$\sin^2\beta+\cos^2\beta=1$$

$$\cos^2\beta=1-\sin^2\beta\qquad\text{(substitusi (1))}$$

$$\cos^2\beta=1-\left[\frac{(y_2-y_1)\sin\alpha}{r}\right]^2$$

$$\cos^2\beta=1-\frac{(y_2-y_1)^2\sin^2\alpha}{r^2}$$

$$\cos^2\beta=\frac{r^2-(y_2-y_1)^2\sin^2\alpha}{r^2}$$

$$\cos\beta=\pm\sqrt{\frac{r^2-(y_2-y_1)^2\sin^2\alpha}{r^2}}$$

$$\cos\beta=\pm\frac{1}{r}\sqrt{r^2-(y_2-y_1)^2\sin^2\alpha}$$

$$\cos\beta=\frac{1}{r}\sqrt{r^2-(y_2-y_1)^2\sin^2\alpha}\ \text{ dan }\ \cos\beta=-\frac{1}{r}\sqrt{r^2-(y_2-y_1)^2\sin^2\alpha}\ .\ (2)$$

$$m=\frac{\sin\beta}{\cos\beta}$$

$$m=\frac{\dfrac{(y_2-y_1)\sin\alpha}{r}}{\dfrac{\sqrt{r^2-(y_2-y_1)^2\sin^2\alpha}}{r}}$$

$$m=\frac{(y_2-y_1)\sin\alpha}{\sqrt{r^2-(y_2-y_1)^2\sin^2\alpha}}$$

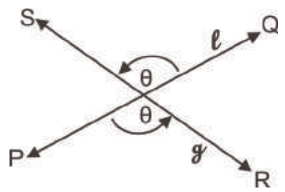
Jadi, slope/ gradient dari l adalah

$$m=\frac{(y_2-y_1)\sin\alpha}{\sqrt{r^2-(y_2-y_1)^2\sin^2\alpha}}$$

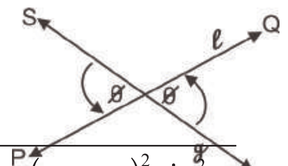
1.6. Sudut diantara Dua Garis

Jika diberikan dua garis l dan g, garis l dilalui oleh dua titik P dan Q ditulis $l=PQ$. Garis g dilalui oleh dua titik R dan S ditulis $g=RS$ maka:

1. Sudut dari l ke g adalah sudut positif terkecil yang diawali dari PQ dan diakhiri RS (arahnya berlawanan jarum jam).

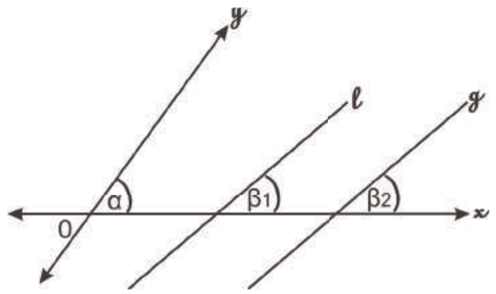


2. Sudut dari garis g ke l adalah sudut positif terkecil yang diawali dari RS dan diakhiri PQ.



1.7. Definisi

Dua buah garis pada koordinat kartesius miring dikatakan sejajar jika kedua garis tersebut memiliki sudut inklinasi yang sama.



1.8. Remark

Dua buah garis yang berimpit adalah sejajar

1.9. Teorema

Dua buah garis non vertical pada koordinat kartesius miring adalah sejajar jika dan hanya jika memiliki slope yang sama.

Bukti:

$\Rightarrow$ Diketahui garis l dan g sejajar

Jelas sudut inklinasi l dan g sama (1.8. definisi)

Jelas $m_l = \tan\beta = m_g$

Jelas $m_l = m_g$

Jadi, slope l dan g sama.

$\Leftarrow$ Diketahui garis l dan g memiliki slope yang sama

Jelas $m_l = m_g$

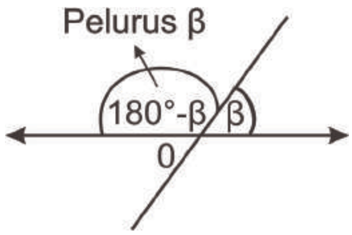
Jelas $m_l = \tan\beta = m_g$

Jelas sudut inklinasi (β) l dan g sama

Jadi, l dan g sejajar

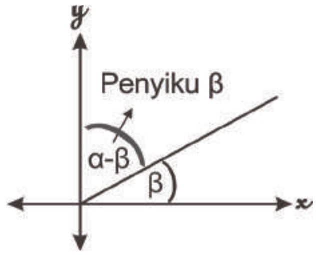
1.10. Definisi

Pelurus dari sudut β adalah $180^o - \beta$.



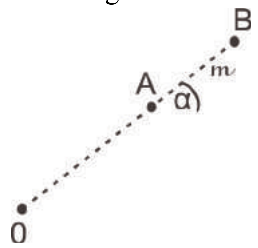
1.11. Definisi

Penyiku dari sudut β adalah $\alpha - \beta$.



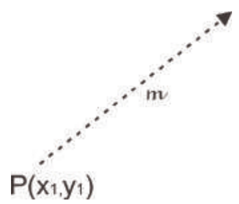
1.12. Definisi

Letak kedudukan (locus) adalah himpunan semua titik yang memiliki kondisi geometrik tertentu.



1.13. Definisi

Garis lurus adalah letak kedudukan titik-titik yang memiliki kemiringan tetap terhadap titik tertentu.



1.14. Remark

Misalkan m adalah kemiringan dan $P_1(x_1, y_1)$ adalah titik tertentu. Berdasarkan 1.15. letak kedudukan titik $P(x, y)$ dengan $P_1(x_1, y_1)$ yang memiliki kemiringan m diformulasikan sebagai berikut:

$$m = \frac{(y - y_1)\sin\alpha}{\sqrt{r^2 - (y - y_1)^2 \sin^2\alpha}}$$

$$m\sqrt{r^2 - (y - y_1)^2 \sin^2\alpha} = (y - y_1)\sin\alpha$$

$$m\sqrt{r^2 - (y - y_1)^2 \sin^2\alpha} = y\sin\alpha - y_1\sin\alpha$$

$$m\sqrt{r^2 - (y - y_1)^2 \sin^2\alpha} + y_1\sin\alpha = y\sin\alpha$$

$$y = \frac{m\sqrt{r^2 - (y - y_1)^2 \sin^2\alpha} + y_1\sin\alpha}{\sin\alpha}$$

dengan

$$r^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + 2(x - x_1)(y - y_1)\cos\alpha$$

1.15. Contoh

Tentukan persamaan garis lurus yang melalui titik P(1,2) yang memiliki slope 2, dalam KKM dengan $\alpha = 60^o$!

Penyelesaian:

$$r^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + 2(x - x_1)(y - y_1)\cos\alpha$$

$$r^2 = (x-1)^2 + (y-2)^2 + 2(x-1)(y-2)\cos 60^o$$

$$r^2 = (x-1)^2 + (y-2)^2 + 2(x-1)(y-2).\frac{1}{2}$$

$$r^2 = (x-1)^2 + (y-2)^2 + (x-1)(y-2)$$

$$y = \frac{m\sqrt{r^2 - (y - y_1)^2 \sin^2\alpha} + y_1\sin\alpha}{\sin\alpha}$$

$$y = \frac{m\sqrt{r^2 - (y - y_1)^2 \sin^2\alpha}}{\sin\alpha} + y_1$$

$$y - y_1 = \frac{m\sqrt{r^2 - (y - y_1)^2 \sin^2\alpha}}{\sin\alpha}$$

$$y - 2 = \frac{2\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (x-1)(y-2) - (y-2)^2 \sin^2 60^o}}{\sin 60^o}$$

$$y - 2 = \frac{2\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (x-1)(y-2) - (y-2)^2 (\frac{1}{2}\sqrt{3})^2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}}$$

$$y - 2 = \frac{4\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (x-1)(y-2) - (y-2)^2 .\frac{3}{4}}}{\sqrt{3}}$$

$$\sqrt{3}.(y-2) = 4\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (x-1)(y-2) - (y-2)^2 .\frac{3}{4}}$$

$$3(y-2)^2 = 16(x-1)^2 + 4(y-2)^2 + 16(x-1)(y-2)$$

$$16(x-1)^2 + (y-2)^2 + 16(x-1)(y-2) = 0$$

$$16(x-1)(y-2) = -16(x-1)^2 - (y-2)^2$$

$$y-2 = \frac{-16(x-1)^2 - (y-2)^2}{16(x-1)}$$

$$y-2 = \frac{-16(x-1)^2}{16(x-1)} - \frac{(y-2)^2}{16(x-1)}$$

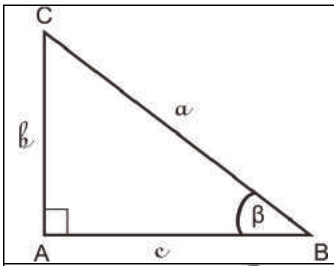
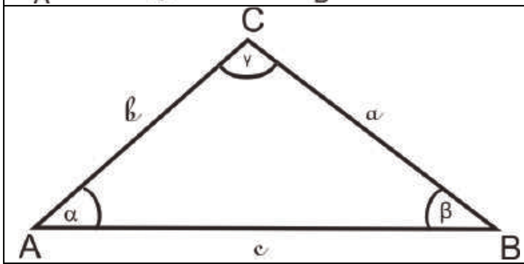
$$y-2 = -(x-1) - \frac{(y-2)^2}{16(x-1)}$$

$$y = -(x-1) - \frac{(y-2)^2}{16(x-1)} + 2$$

Dari contoh 1.20 dapat diketahui bahwa persamaan akhir tidak membentuk persamaan garis namum membentuk persamaan kuadrat. Oleh karena itu formula yang dihasilkan tidak dapat digunakan secara umum. Sehingga perlu dilakukan modifikasi agar formula persamaan garis dapat berlaku secara umum.

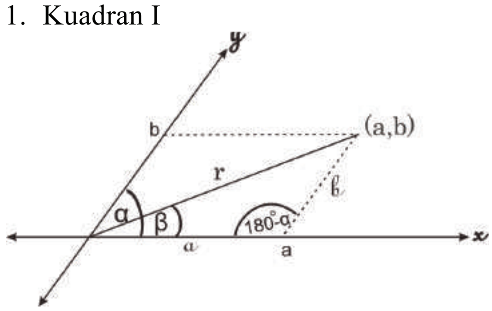
Berikut hasil modifikasi trigonometri dengan mengubah sudut yang lazim digunakan yakni 90^0 menjadi α^o, dimana 0° < α < 180° dan α ≠ 90° yang selanjutnya peneliti sebut dengan *Trigonometri Relatif.*

Trigonometri Relatif

	$Sin_{\urcorner}\beta = \frac{b}{a}$ $Cos_{\urcorner}\beta = \frac{c}{a}$ $Tan_{\urcorner}\beta = \frac{b}{c}$
	$Sin_{\alpha}\beta = \frac{b}{a}$ $Cos_{\alpha}\beta = \frac{c}{a}$ $Tan_{\alpha}\beta = \frac{b}{c}$

1.4 Sudut Berelasi

1. Kuadran I

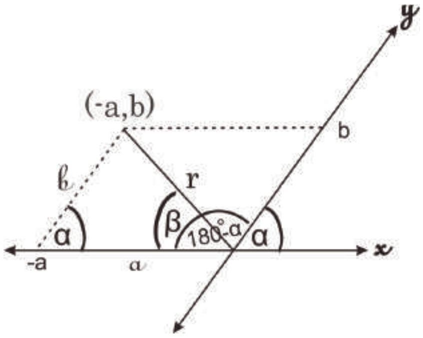


$$Sin_{(180°-\alpha)}\beta = \frac{b}{r}$$

$$Cos_{(180°-\alpha)}\beta = \frac{a}{r}$$

$$Tan_{(180°-\alpha)}\beta = \frac{b}{a}$$

2. Kuadran II $(-\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$



$$Sin_{\alpha}\beta = \frac{b}{r}$$

$$Cos_{\alpha}\beta = \frac{-a}{r}$$

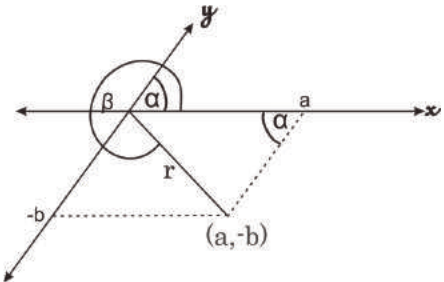
$$Tan_{\alpha}\beta = \frac{-b}{a}$$

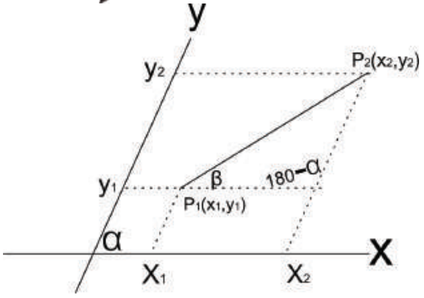
$$Sin_{(180°-\alpha)}\beta = \frac{-b}{r}$$

$$Cos_{(180°-\alpha)}\beta = \frac{-a}{r}$$

$$Tan_{(180°-\alpha)}\beta = \frac{b}{a}$$

4. Kuadran IV

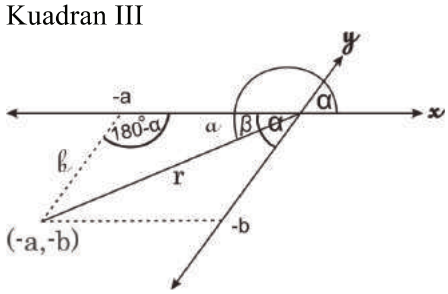




Contoh:

Tentukan persamaan garis yang melalui titik A (1,1) dan B (2,2) pada koordinat miring $\alpha = 60^o$!

3. Kuadran III



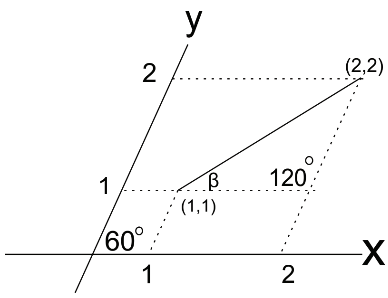
$$Sin_{\alpha}\beta = \frac{-b}{r}$$

$$Cos_{\alpha}\beta = \frac{a}{r}$$

$$Tan_{\alpha}\beta = \frac{-b}{a}$$

Berdasarkan trigonometri relatif maka persamaan garis yang melalui $P_1 = (x_1, y_1)$ dan $P_2 = (x_2, y_2)$ pada koordinat miring α^o menjadi:

$$\boxed{\begin{array}{l} y - y_1 = m_r(x - x_1) \\ \quad m_r = \tan_{(180^o - \alpha^o)}\beta \\ \text{dengan} \\ \quad m_r = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \end{array}}$$



Jawab:

$$m_r = \tan_{180^o - 60^o} \beta$$
$$m_r = \tan_{120^o} \beta$$
$$m_r = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$
$$m_r = \frac{2-1}{2-1}$$
$$m_r = 1$$

Sehingga persamaan garisnya adalah

$$y - y_1 = m_r(x - x_1)$$
$$y - 1 = 1(x - 1)$$
$$y = x$$

4. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil pembahasan maka kesimpulan yang diperoleh adalah:
Persamaan garis pada koordinat bidang miring dengan kemiringan α^o, dimana 0° < α < 180° dan α ≠ 90° adalah

$$y = \frac{m\sqrt{r^2 - (y - y_1)^2 \sin^2 \alpha} + y_1 \sin \alpha}{\sin \alpha}$$

dengan

$$r^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + 2(x - x_1)(y - y_1)\cos \alpha$$

Akan tetapi persamaan ini tidak berlaku untuk umum karena terdapat contoh yang menunjukan bahwa persamaan tersebut tidak membentuk persamaan kuadrat melainkan persamaan garis. Sehingga perlu dilakukan modifikasi trigonometri yang umum menjadi trigonometri relatif. Diperoleh persamaan persamaan garis yang melalui $P_1 = (x_1, y_1)$ dan $P_2 = (x_2, y_2)$ pada koordinat miring α^o menjadi:

$$y - y_1 = m_r(x - x_1)$$

$$m_r = \tan_{(180^o - \alpha^o)} \beta$$

dengan $$m_r = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

DAFTAR PUSTAKA

Beecher, J. A, Penna, J. A, & Bittinger, M. L. 2007. *Algebra and Trigonometry 3rd Edition*. Addison Wesley.

Bocher, M. 1915. *Plane Analytic Geometry.* USA: Henry Holt and Company.

Corral, M. 2009. *Trigonometry.* Michigan: GNU Free Document License.

Fuller, G. 1954. *Analytic Geometri*. USA: Addison-Wesley Publishing Company, Inc.

Hadiwidjojo, M. 1974. *Ilmu Ukur Analit Bidang.* Yogyakarta: FPMIPA IKIP

Jain, P. K & Ahmad, K. 1996. *Analytical Geometry of Two Dimensions 2nd Edition*. New Delhi: New Age International (P) Ltd.

Siceloff, L. P, Wentworth. G, & Smith. D. E. 1922. *Analytic Geometry*. Boston: Ginn and Company.